GLOBAL JOURNAL OF CROSS-DISCIPLINARY INNOVATIONS
Multidisciplinary peer-reviewed scholarly journal
GJCDI
Vol. 1 | Issue 3
Year: 2026

GRAF NAZARIYASIDA DARAXTLAR VA O‘RMONLAR: ASOSIY XOSSALARI, BOG‘LANISHLARI HAMDA ELEMENTLARINI ANIQLASH USULLARI

Erkinjonova Dillola Nodirjon qizi
Farg‘ona Davlat Texnika Universiteti talabasi
Komiljonova Faridaxonim Zarifjon qizi
Farg‘ona Davlat Texnika Universiteti talabasi
Botirva Nasiba Djurboyvna
Farg‘ona Davlat Texnika Universiteti, Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya

Ushbu maqolada graf nazariyasining muhim obyektlari hisoblangan daraxt va o‘rmon tushunchalari, ularning asosiy xossalari hamda o‘zaro bog‘lanishlari yoritiladi. Daraxtning bog‘langan va siklsiz graf ekanligi, uchlar va qirralar soni o‘rtasidagi munosabat, yagona yo‘l mavjudligi, barg uchlar va qirralarni olib tashlash xususiyatlari izohlanadi. O‘rmon tarkibidagi daraxtlar sonini aniqlashning komponentlar soniga asoslangan usuli, shuningdek, qirralar soni orqali hisoblash formulasi bayon etiladi. Nazariy natijalar sodda misollar bilan mustahkamlanib, mavzuning matematik modellashtirishdagi ahamiyati ko‘rsatib beriladi.

Kalit so‘zlar: graf, daraxt, o‘rmon, uch, qirra, bog‘langanlik, sikl, komponent, barg uch, qamrovchi daraxt.

KIRISH

Graf nazariyasi diskret matematikaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, unda obyektlar va ular orasidagi munosabatlar graf yordamida ifodalanadi. Grafning uchlari o‘rganilayotgan obyektlarni, qirralari esa ular orasidagi aloqalarni bildiradi. Bunday yondashuv transport tarmoqlari, kompyuter kommunikatsiyalari, elektr zanjirlari, ijtimoiy tarmoqlar va ishlab chiqarish jarayonlarini matematik modellashtirishda keng qo‘llanadi.

Daraxtlar va o‘rmonlar graf nazariyasida alohida o‘rin tutadi. Daraxt sikllarga ega bo‘lmagan bog‘langan graf bo‘lib, unda istalgan ikki uch orasida yagona oddiy yo‘l mavjud. O‘rmon esa siklsiz graf bo‘lib, uning har bir bog‘langan komponenti daraxtdan iborat. Shu sababli o‘rmonni bir nechta o‘zaro bog‘lanmagan daraxtlar majmuasi sifatida qarash mumkin.

Mavzuning dolzarbligi daraxt va o‘rmonlarning sodda tuzilishga ega bo‘lishi bilan birga, murakkab tarmoqlardagi bog‘lanishlarni ixcham ifodalash imkoniyatiga egaligidadir. Masalan, tarmoqdagi ortiqcha bog‘lanishlarni olib tashlab, barcha tugunlar orasidagi aloqani saqlab qolish masalasi qamrovchi daraxt tushunchasi orqali yechiladi.

Maqolaning maqsadi — daraxt va o‘rmonlarning ta’riflari hamda asosiy xossalarini tizimli bayon qilish, ularning bog‘lanishlarini tushuntirish va o‘rmondagi daraxtlar sonini aniqlash usullarini ko‘rsatish. Ushbu maqsadga erishish uchun grafning uch, qirra, yo‘l, sikl va bog‘langan komponent kabi tushunchalari tahlil qilinadi.

METODOLOGIYA

Tadqiqot nazariy-tahliliy xarakterga ega. Unda graf nazariyasining asosiy ta’riflari, mantiqiy isbotlash, taqqoslash va misollar yordamida tekshirish usullaridan foydalanildi. Ko‘rib chiqilayotgan graflar chekli, yo‘naltirilmagan va odatda takroriy qirralarsiz sodda graflar deb olinadi.

G = (V, E) ko‘rinishidagi grafda V — uchlar to‘plami, E esa qirralar to‘plamidir. Uchlar soni |V| = n, qirralar soni |E| = m bilan belgilanadi. Ikki uch orasidagi yo‘l ketma-ket qirralardan tashkil topadi. Agar yo‘lning boshlang‘ich va oxirgi uchlari bir xil bo‘lib, boshqa uchlar takrorlanmasa, u siklni hosil qiladi. Grafning har qanday ikki uchi orasida yo‘l mavjud bo‘lsa, graf bog‘langan deyiladi.

Daraxt — bog‘langan va siklsiz graf. O‘rmon — siklsiz graf; demak, o‘rmonning har bir bog‘langan komponenti alohida daraxt hisoblanadi. Agar o‘rmonning uchlari soni n, qirralari soni m, bog‘langan komponentlari (daraxtlari) soni k bo‘lsa, u holda quyidagi munosabat o‘rinli: $m = n - k$. Bundan daraxtlar sonini $k = n - m$ formula orqali aniqlash mumkin.

NATIJALAR

Daraxtning muhim xossalaridan biri shuki, n ta uchga ega bo‘lgan har qanday daraxt aynan n − 1 ta qirraga ega. Bu natijani daraxtning barg uchini ketma-ket olib tashlash orqali tushuntirish mumkin: har qanday chekli daraxtda kamida bitta barg uch mavjud; barg uch va unga tutash yagona qirra olib tashlanganda qolgan graf ham daraxt bo‘lib qoladi. Jarayon bitta uch qolguncha davom ettirilsa, dastlabki daraxtdagi qirralar soni uchlar sonidan bittaga kamligi kelib chiqadi.

Daraxt uchun quyidagi ekvivalent belgilar ham muhim: (1) graf bog‘langan va siklsiz; (2) graf bog‘langan hamda n − 1 ta qirraga ega; (3) graf siklsiz hamda n − 1 ta qirraga ega; (4) istalgan ikki uch orasida yagona oddiy yo‘l mavjud. Bu belgilar daraxt ekanligini turli shartlar orqali tekshirish imkonini beradi.

Daraxtda istalgan qirrani olib tashlash grafni ikkita bog‘langan komponentga ajratadi. Aksincha, daraxtga yangi qirra qo‘shilsa, yagona yo‘l bilan birga sikl hosil bo‘ladi. Demak, daraxt bog‘langanlikni saqlagan holda qirralari eng kam bo‘lgan graf, sikl hosil qilmasdan yana qirra qo‘shib bo‘lmaydigan grafdir.

Har qanday daraxtda kamida ikkita barg uch mavjud (bitta uchli daraxt holati bundan mustasno). Barg uchning darajasi 1 ga teng. Daraxtdagi uch darajalari yig‘indisi qirralar sonining ikki baravariga teng: $\Sigma \deg(v) = 2(n - 1)$. Bu tenglik qo‘shni uchlar soni va qirralar o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

O‘rmonlarning tuzilishi va daraxtlar soni

O‘rmon bir yoki bir nechta daraxtlardan tashkil topadi. Uning komponentlari o‘zaro umumiy uchga ega bo‘lmaydi va ular orasida yo‘l mavjud emas. O‘rmondagi har bir komponent alohida daraxt bo‘lgani uchun, agar i-komponentda n_i ta uch bo‘lsa, unda $n_i - 1$ ta qirra bo‘ladi. Barcha komponentlar bo‘yicha yig‘indini olsak:

$$\mathbf{m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = n - k.}$$

Bu yerda $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ — o‘rmondagi jami uchlar soni, m — jami qirralar soni, k — bog‘langan komponentlar, ya’ni daraxtlar soni. Shunday qilib, o‘rmondagi daraxtlar soni uchlar sonidan qirralar sonini ayirish orqali topiladi: $k = n - m$.

Birinchi usul — komponentlarni bevosita aniqlash. Graf chizmasida bir-biriga yo‘l orqali bog‘langan uchlar guruhlarga ajratiladi. Har bir guruh bitta daraxtni tashkil qiladi. Bu usul kichik graflarda qulay.

Ikkinchi usul — formula orqali hisoblash. Avval jami uchlar soni n va qirralar soni m aniqlanadi, so‘ng $k = n - m$ formulasi qo‘llanadi. Ushbu usul o‘rmon ekanligi ma’lum bo‘lgan graf uchun tez va qulay hisoblanadi. Muhim jihati: formula faqat siklsiz graf, ya’ni o‘rmon uchun qo‘llanadi.

Uchinchi usul — qidiruv algoritmlari yordamida komponentlarni topish. Kenglik bo‘yicha qidiruv (BFS) yoki chuqurlik bo‘yicha qidiruv (DFS) orqali hali ko‘rilmagan uchdan qidiruv boshlanadi. Har bir yangi qidiruv jarayonida topilgan barcha uchlar bitta komponentga tegishli bo‘ladi. Barcha uchlar ko‘rib chiqilgach, qidiruv necha marta boshlangan bo‘lsa, komponentlar soni ham shuncha bo‘ladi. Agar graf o‘rmon bo‘lsa, bu qiymat daraxtlar soniga teng.

Faraz qilaylik, berilgan o‘rmon 12 ta uch va 8 ta qirraga ega. O‘rmondagi daraxtlar soni:

$$\mathbf{k = n - m = 12 - 8 = 4.}$$

Demak, ushbu o‘rmon 4 ta bog‘langan komponentdan, ya’ni 4 ta daraxtdan tashkil topgan. Natijani komponentlarni alohida sanash orqali ham tekshirish mumkin. Agar grafda sikl mavjud bo‘lsa, u o‘rmon bo‘lmaydi va $k = n - m$ formulasidan daraxtlar sonini aniqlash uchun foydalanib bo‘lmaydi.

MUHOKAMA

Olingan nazariy natijalar daraxt va o‘rmon tushunchalari o‘zaro chambarchas bog‘langanini ko‘rsatadi. Daraxt — bitta bog‘langan komponentdan iborat o‘rmonning xususiy holati. O‘rmon esa bir nechta daraxtlarning birlashmasi sifatida qaraladi. Shu sababli daraxtga oid ko‘plab xossalar o‘rmonning har bir komponentiga alohida qo‘llanadi.

Daraxtning $n - 1$ qirraga egaligi uning minimal bog‘langan graf ekanligini ifodalaydi. Bu xususiyat amaliy masalalarda, xususan, tarmoqni eng kam aloqa liniyalari bilan bog‘lashda muhimdir. Bog‘langan grafning barcha uchlarini qamrab oluvchi daraxt

qamrovchi daraxt deb ataladi. Bitta grafda bir nechta turli qamrovchi daraxtlar mavjud bo‘lishi mumkin.

O‘rmondagi daraxtlar sonini $k = n - m$ formulasi bilan topish hisoblashni soddalashtiradi. Biroq formulani qo‘llashdan oldin grafda sikl yo‘qligini tekshirish zarur. Aks holda, formula komponentlar sonini bermaydi. Katta hajmdagi graflarda BFS yoki DFS algoritmlaridan foydalanish komponentlarni aniqlashni avtomatlashtiradi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, yo‘naltirilgan graflar, ko‘p qirrali graflar yoki cheksiz graflarda ayrim ta’rif va natijalar alohida izoh talab qiladi. Mazkur maqoladagi formulalar chekli, yo‘naltirilmagan va sodda graflar uchun bayon qilindi.

XULOSA

Maqolada graf nazariyasidagi daraxt va o‘rmon tushunchalari, ularning asosiy xossalari hamda bog‘lanishlari ko‘rib chiqildi. Daraxt bog‘langan va siklsiz graf, o‘rmon esa siklsiz graf ekanligi asoslandi. Daraxtdagi istalgan ikki uch orasida yagona oddiy yo‘l mavjudligi, n ta uchli daraxtda $n - 1$ ta qirra bo‘lishi va qirrani olib tashlash grafni ikki komponentga ajratishi kabi xossalar yoritildi.

O‘rmondagi daraxtlar sonini aniqlashning asosiy formulasi $k = n - m$ ko‘rinishida ifodalanadi. Bu yerda n — uchlar, m — qirralar, k — bog‘langan komponentlar soni. Formuladan foydalanish uchun grafning o‘rmon, ya’ni siklsiz graf ekanligi shart. Kichik graflarda komponentlarni bevosita sanash, katta graflarda esa BFS va DFS algoritmlaridan foydalanish maqsadga muvofiq.

Daraxt va o‘rmonlarning xossalarini o‘rganish diskret matematik tafakkurni rivojlantiradi hamda turli tarmoqlarni tahlil qilish, optimallashtirish va modellashtirish masalalarini yechishda nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Diestel, R. Graph Theory. 5th ed. Berlin: Springer, 2017.
2. West, D. B. Introduction to Graph Theory. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.
3. Bondy, J. A., Murty, U. S. R. Graph Theory. New York: Springer, 2008.

4. Rosen, K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 8th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019.
5. Harary, F. Graph Theory. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969.