GLOBAL JOURNAL OF
CROSS-DISCIPLINARY
INNOVATIONS
Multidisciplinary peer-reviewed scholarly journal
GJCDI
Vol. 1 | Issue 3
Year: 2026

KANTOR NAZARIYASI VA KANTOR TEOREMASI: TO‘PLAMLAR QUVVATI, ISBOTI HAMDA AMALIY MISOLLAR TAHLILI

Nabijonov Mirazimboy Nozimjon o‘g‘li
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi

Sobirjonova Go‘zaloy Umidjon qizi
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi

Botirva Nasiba Djurboyvna
Farg‘ona davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya. Maqolada Georg Kantor nazariyasining asosiy tushunchalari, to‘plamlar quvvatini taqqoslash mezonlari va Kantor teoremasining mazmuni nazariy-uslubiy yondashuv asosida tahlil qilinadi. Tadqiqotda biyeksiya qurish, teskarisini faraz qilish va diagonal usullardan foydalaniladi. Ixtiyoriy to‘plamning quvvati uning barcha qism to‘plamlari to‘plami quvvatidan qat’iy kichikligi isbotlanadi. Natural, butun va ratsional sonlarning sanoqliligi, haqiqiy sonlar hamda cheksiz ikkilik ketma-ketliklarning sanoqsizligi izohlanadi. Uch elementli to‘plam, raqamli ruxsatlar va algoritmik tavsiflashga oid misollar orqali nazariyaning amaliy mazmuni ochib beriladi. Natijalar chekli kombinatorik o‘sish bilan cheksiz kardinallik o‘rtasidagi farqni aniqlashtiradi hamda mavzuni izchil o‘qitish uchun asos yaratadi.

Kalit so‘zlar: Kantor teoremasi, to‘plam quvvati, biyeksiya, sanoqli to‘plam, sanoqsiz to‘plam, qism to‘plamlar, diagonal usul.

Kirish

To‘plam quvvati uning elementlari miqdorini ifodalaydi. Chekli to‘plamda bu miqdor oddiy sanash bilan aniqlanadi; cheksiz to‘plamda esa elementlarni o‘zaro mos qo‘yish zarur. Georg Kantor ishlab chiqqan yondashuv cheksiz to‘plamlarning ham turli quvvatlarga ega bo‘lishini ko‘rsatadi. Jumladan, natural sonlar va juft natural sonlar orasida biyeksiya mavjudligi cheksizlik haqidagi odatiy tasavvurni aniqlashtiradi [1].

Mavzuning dolzarbligi to‘plamlar nazariyasining matematik tahlil va informatika uchun umumiy til yaratishi bilan bog‘liq. Ta’limda qism to‘plamni dastlabki to‘plamdan doimo kichik deb hisoblash yoki barcha cheksiz to‘plamlarni teng quvvatli deb qabul qilish xatolari uchrashi mumkin. Mazkur maqolaning maqsadi quvvat tushunchasini aniq ta’riflash, Kantor teoremasini mantiqiy bosqichlarda isbotlash va natijalarni tekshiriladigan misollarda sharhlashdir. Asosiy tadqiqot savoli quyidagicha: nima uchun to‘plamning barcha qism to‘plamlarini uning o‘z elementlari bilan to‘liq o‘zaro bir qiymatli moslashtirib bo‘lmaydi?

Maqolada ma’lum matematik natijalar chekli kodlash misollari bilan izchil bog‘lanadi. Bunday yondashuv elementni sanash, qism to‘plamni tanlash va cheksiz obyektlarni tasvirlash vazifalarining umumiy asosini ochadi. Xususan, uch elementli to‘plamdagi sakkizta tanlovni bitlar bilan ifodalash keyinchalik natural sonlarning qism to‘plamlarini cheksiz ketma-ketliklar orqali tavsiflashga tayyorlaydi. Shu tariqa sodda kombinatorik kuzatish umumiy teoremaning mazmunini anglash uchun tayanch vazifasini bajaradi.

Materiallar va metodlar

Tadqiqot nazariy-uslubiy xarakterga ega. Material sifatida to‘plamlar nazariyasi va diskret matematika bo‘yicha ochiq darsliklardagi ta’riflar hamda teoremalar olindi [1–3]. Tahlil uchun chekli to‘plam, natural va ratsional sonlar, cheksiz ikkilik ketma-ketliklar tanlandi. Natijalar matematik deduksiya bilan asoslandi; sonli misollar umumiy formulalarga bevosita qo‘yish orqali hisoblandi.

Tahlil uch bosqichda bajarildi. Dastlab quvvatni solishtirish uchun inyeksiya va biyeksiya mezonlari belgilandi. Keyin Kantor teoremasi teskarisini faraz qilish orqali isbotlandi. Yakunda chekli misollar va cheksiz obyektlar taqqoslanib, ularning informatika uchun talqini berildi. Har bir moslikda aniqlanish sohasi, bir qiymatlilik va barcha zarur elementlarni qamrab olish shartlari tekshirildi.

Belgilar quyidagicha qabul qilinadi: $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ mos ravishda butun, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlaridir. $|A|$ to‘plam quvvatini, $P(A)$ esa uning barcha qism to‘plamlari to‘plamini bildiradi. $\aleph_0$ sanoqli cheksiz to‘plam quvvati, $\mathfrak{c}$ haqiqiy sonlar to‘plami quvvatidir.

Natijalar

Quvvat va teng quvvatlilik

Agar $f: A \to B$ moslikda turli elementlarning tasvirlari turlicha bo‘lsa, u inyektiv deyiladi. Agar B ning har bir elementi kamida bitta asliyatga ega bo‘lsa, moslik suryektiv bo‘ladi. Ikkala shartni qanoatlantirgan moslik biyeksiyadir. A va B orasida biyeksiya mavjud bo‘lishi $|A| = |B|$ ekanini anglatadi. A dan B ga inyeksiya mavjudligi $|A| \leq |B|$ bilan belgilanadi [1].

Kantor teoremasining isboti

Teorema. Har qanday A to‘plam uchun $|A| < |P(A)|$. Isbotning birinchi qadamida $a \mapsto \{a\}$ moslikni olamiz. Turli elementlar turli bir elementli qism to‘plamlarga o‘tadi. Demak, bu inyeksiya bo‘lib, $|A| \leq |P(A)|$ munosabatni beradi [3].

Ikkinchi qadamda $f: A \to P(A)$ suryeksiya mavjud deb faraz qilamiz. Quyidagi qism to‘plamni aniqlaymiz:

$$D = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

$D \subseteq A$ bo‘lgani uchun $D \in P(A)$. Suryektivlikka ko‘ra, shunday $d \in A$ topiladiki, $f(d) = D$. Ammo D ning ta’rifidan quyidagi qarama-qarshilik kelib chiqadi:

$$d \in D \Leftrightarrow d \notin f(d) \Leftrightarrow d \notin D.$$

Shunday qilib, suryeksiya, demak, biyeksiya ham mavjud emas. Birinchi qadam bilan birga bu $|A| < |P(A)|$ ni isbotlaydi. Bo‘sh to‘plam holatida ham natija to‘g‘ri: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ bo‘lib, quvvatlar mos ravishda 0 va 1 ga teng.

Natural sonlar bilan biyeksiyaga ega cheksiz to‘plam sanoqli cheksiz deyiladi. Masalan, $n \mapsto 2n$ moslik $\mathbb{N}$ ni juft natural sonlarga biyektiv akslantiradi. Butun sonlar $0,1,-1,2,-2,\ldots$ tartibida yoziladi. Ratsional sonlar esa p/q ko‘rinishida, $p \in \mathbb{Z}$ va $q \in \mathbb{N}$ bo‘yicha $|p| + q$ qiymati ortib boradigan tartibda sanaladi. Takroriy kasrlar olib tashlansa, har bir ratsional son ro‘yxatda aynan bir marta uchraydi.

Kantor teoremasidan $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ kelib chiqadi. Har bir $B \subseteq \mathbb{N}$ ga uning xarakteristik ketma-ketligi mos qo‘yiladi: $b_n = 1$ agar $n \in B$ bo‘lsa, aks holda $b_n = 0$. Bu biyeksiya bo‘lgani uchun barcha cheksiz ikkilik ketma-ketliklar ham sanoqsizdir [2]. Asosiy natijalar 1-jadvalda jamlandi.

1-jadval. Asosiy to‘plamlar quvvatining taqqoslanishi

To‘plam	Quvvati	Asoslovchi moslik yoki xossa
Uch elementli A	3	Elementlarni bevosita sanash
$P(A)$, bunda $\|A\| = 3$	$2^3 = 8$	Har bir element uchun ikki tanlov
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	$\aleph_0$	Natural sonlar bilan biyeksiya
Barcha cheksiz ikkilik ketma-ketliklar	$2^{\aleph_0}$	$P(\mathbb{N})$ bilan biyeksiya
$\mathbb{R}$	$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$	Kontinuum quvvati
$P(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$	Kantor teoremasi

Manba: [1–3] dagi natijalar asosida mualliflar tomonidan tuzildi.

Chekli to‘plam va raqamli ruxsatlar misoli

$A = \{a, b, c\}$ bo‘lsin. Uning qism to‘plamlari quyidagilardan iborat:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Demak, $|A| = 3$ va $|P(A)| = 8$. Har bir qism to‘plamni uch bit bilan kodlash mumkin: masalan, $\{a, c\}$ uchun 101, bo‘sh to‘plam uchun 000 olinadi. Umuman, n elementning har biri tanlanadi yoki tanlanmaydi; shu sababli 2^n xil qism to‘plam hosil bo‘ladi.

Agar axborot tizimida foydalanuvchi uchun 10 ta mustaqil ruxsat mavjud bo‘lsa, ularning barcha kombinatsiyalari soni $2^{10} = 1024$ ga teng. Ruxsatlar soni 20 taga yetganda bu miqdor $2^{20} = 1\,048\,576$ bo‘ladi. Shunday qilib, ruxsatlar sonining ikki baravar ortishi kombinatsiyalar sonini 1024 baravar oshiradi. Bunda bo‘sh va to‘liq ruxsatlar to‘plami ham hisobga olinadi.

Natijalar cheksiz to‘plamning xos qism to‘plami u bilan teng quvvatli bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadi. Juft natural sonlar misoli bunga dalildir. Kantor teoremasi esa aynan barcha qism to‘plamlar to‘plami haqida qat’iy tengsizlik beradi. Demak, $B \subset A$ munosabatning o‘zi cheksiz holatda $|B| < |A|$ xulosasi uchun yetarli emas. Bu farq masalalarni yechishda moslikni aniq qurish zarurligini tushuntiradi.

Haqiqiy sonlarning sanoqsizligini ham diagonal usul bilan ko‘rish mumkin. Faraz qilaylik, $(0,1)$ dagi sonlar $x_1, x_2, \ldots$ ro‘yxatga olingan va a_{nn} son x_n ning verguldan keyingi n-raqami bo‘lsin. Yangi y sonning n-raqamini $a_{nn} \neq 1$ bo‘lsa 1, aks holda 2 deb tanlaymiz. Shunda y har bir x_n dan kamida n-raqamda farq qiladi. Faqat 1 va 2 raqamlaridan foydalanish o‘nli yozuvning 9 lar bilan tugashiga oid ikkilanishni bartaraf etadi. Ro‘yxat to‘liq emas, demak, $(0,1)$ va $\mathbb{R}$ sanoqsizdir.

Informatikada mazkur farq algoritmik ifodalash chegaralarini yoritadi. Chekli alifboda yozilgan barcha chekli dastur matnlarini avval uzunligi, keyin leksikografik tartib bo‘yicha sanash mumkin. Demak, dasturlar to‘plami ko‘pi bilan sanoqli. $\mathbb{N}$ dan $\{0,1\}$ ga barcha funksiyalar esa xarakteristik ketma-ketliklar orqali $P(\mathbb{N})$ bilan biyeksiyaga ega va sanoqsiz. Har bir dastur ko‘pi bilan bitta shunday to‘liq funksiyani hisoblashi sababli barcha funksiyalar uchun algoritm mavjud bo‘la olmaydi [2].

Amaliy misoldagi eksponensial o‘sish muayyan algoritmning vaqt murakkabligini o‘z-o‘zidan belgilamaydi: barcha variantlarni alohida chiqarish talabi bilan bitta maqbul variantni topish vazifasi farqlanadi. Shuningdek, ruxsatlar o‘zaro bog‘liq bo‘lsa, haqiqiy kombinatsiyalar soni kamayadi. Ushbu nazariy tahlil o‘qitish samaradorligini tajribada o‘lchamaydi; metodik tavsiyalar ta’rif, isbot va misollar orasidagi mantiqiy bog‘lanishga tayanadi.

Xulosa

Kantor teoremasi har qanday to‘plamning barcha qism to‘plamlari to‘plami undan qat’iy katta quvvatga ega ekanini asoslaydi. Diagonal isbot ushbu natijaning chekli va cheksiz holatlarda yagona mantiqiy tamoyilga tayanishini ko‘rsatadi. Tahlil natijasida teng quvvatlilikni biyeksiya orqali tekshirish, sanoqli va sanoqsiz obyektlarni ajratish hamda qism to‘plamlar sonini hisoblashning bog‘liqligi ochib berildi. Mavzuni o‘qitishda chekli to‘plamlarni sanashdan boshlab, biyeksiya va diagonal isbotga bosqichma-bosqich o‘tish maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Hammack R. Book of Proof. 3-nashr, 3.4-tahrir. Richmond: Richard Hammack, 2018. §§ 1.4, 14.1–14.3. https://richardhammack.github.io/BookOfProof/Main.pdf

[2] Lehman E., Leighton F. T., Meyer A. R. Mathematics for Computer Science. MIT, 2015. 7-bob: Infinite Sets, 205–239-b. https://ocw.mit.edu/courses/6-042j-mathematics-for-computer-science-spring-2015/mit6_042js15_session11.pdf

[3] Zach R. Sets, Logic, Computation: An Open Introduction to Metalogic. Open Logic Project, 2025. §§ 4.8–4.10, 62–67-b. https://slc.openlogicproject.org/slc-print.pdf Elektron manbalarga murojaat sanasi: 09.11.2026.