GLOBAL JOURNAL OF CROSS-DISCIPLINARY INNOVATIONS
Multidisciplinary peer-reviewed scholarly journal
GJCDI
Vol. 1 | Issue 3
Year: 2026

BUL FUNKSIYALARINING TO‘LIQLIK MEZONLARI, POST TEOREMASI VA JEGALKIN POLINOMLARI

Odilov Shoxjaxon Bunyodjon o‘g‘li
Tolibjonov Muhammadamin Arabboy o‘g‘li
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabalari
Botirva Nasiba Djurboyvna — Farg‘ona davlat texnika universiteti
Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya. Maqolada Bul funksiyalari, ularning funksional to‘liqligi va Post teoremasi asosida mantiqiy amallar tizimining to‘liqligini aniqlash masalalari yoritiladi. Postning beshta yopiq sinfi — nolni saqlovchi, birni saqlovchi, o‘z-o‘ziga dual, monoton va chiziqli funksiyalar sinflari tavsiflanadi. Shuningdek, mantiqiy funksiyalarni Jegalkin polinomlari orqali ifodalash, koeffitsiyentlarni aniqlash va kichik misollar yordamida hisoblash usuli ko‘rsatiladi. Mavzuning diskret matematika, raqamli qurilmalar hamda mantiqiy sxemalarni tahlil qilishdagi amaliy ahamiyati muhokama qilinadi.

Kalit so‘zlar: Bul funksiyasi, Bul algebrasi, funksional to‘liqlik, Post teoremasi, yopiq sinf, monotonlik, o‘z-o‘ziga dual funksiya, chiziqli funksiya, Jegalkin polinomi, XOR amali, mantiqiy sxema.

KIRISH

Raqamli texnologiyalar, kompyuter arxitekturasi va avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlarining matematik asosini diskret matematika tashkil etadi. Uning muhim bo‘limlaridan biri Bul algebrasi bo‘lib, u mantiqiy qiymatlar va ular ustida bajariladigan amallarni o‘rganadi. Bul algebrasida o‘zgaruvchilar odatda 0 va 1 qiymatlarni qabul qiladi. Bu qiymatlar mos ravishda yolg‘on va rost holatlarni ifodalaydi.

Har qanday chekli sondagi ikkilik o‘zgaruvchiga bog‘liq mantiqiy qonuniyatni Bul funksiyasi yordamida ifodalash mumkin. Biroq amaliy masalalarda barcha mantiqiy amallardan foydalanish shart emas. Muhim savol shundan iboratki, berilgan amallar to‘plami orqali istalgan Bul funksiyasini hosil qilish mumkinmi? Bu masala funksional to‘liqlik deb ataladi.

Funksional to‘liqlikni tekshirishda Emil Post tomonidan ishlab chiqilgan mezon alohida ahamiyatga ega. Ikkinchi tomondan, Jegalkin polinomlari Bul funksiyalarini XOR (modul 2 bo‘yicha qo‘shish) va AND amallari orqali yagona ko‘rinishda ifodalash imkonini beradi. Ushbu maqolaning maqsadi mazkur ikki yondashuvning nazariy

mazmunini tushuntirish, hisoblash usullarini ko‘rsatish va ularning amaliy ahamiyatini ochib berishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari: Bul funksiyasi va funksional to‘liqlik tushunchalarini izohlash; Postning beshta sinfini tavsiflash; Post teoremasi mezonini amaliy tekshiruvga tatbiq etish; Jegalkin polinomini tuzish algoritmini bayon qilish; olingan natijalarning raqamli mantiqdagi qo‘llanishini ko‘rsatish.

METODOLOGIYA

n ta ikkilik o‘zgaruvchiga bog‘liq Bul funksiyasi $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ko‘rinishida aniqlanadi. Masalan, ikki o‘zgaruvchili AND funksiyasi $f(x,y)=x \wedge y$ bo‘lib, faqat $x=1$ va $y=1$ bo‘lganda 1 qiymatni qabul qiladi. OR amali $x \vee y$, inkor amali esa $\neg x$ bilan belgilanadi.

Mantiqiy funksiyalar tizimi funksional to‘liq deyiladi, agar shu tizimdagi funksiyalarni chekli marta qo‘llash, o‘zgaruvchilarni almashtirish va zarur hollarda takrorlash orqali istalgan Bul funksiyasini ifodalash mumkin bo‘lsa. Masalan, $\{\neg, \wedge\}$ tizimi funksional to‘liqdir, chunki OR amalini De Morgan qonuni orqali $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$ shaklida ifodalash mumkin. NAND (Sheffer shtrixi) amali yakka holda ham funksional to‘liq tizim hosil qiladi.

Post teoremasiga ko‘ra, Bul funksiyalarining chekli tizimi funksional to‘liq bo‘lishi uchun u quyidagi beshta sinfning har biriga kirmaydigan kamida bitta funksiyani o‘z ichiga olishi zarur. Boshqacha aytganda, tizim beshta sinfning hech birida to‘liq joylashib qolmasligi kerak.

T_0 — nolni saqlovchi funksiyalar. $f(0,0,\ldots,0)=0$ shartini bajaradi. Masalan, $x \wedge y$ funksiyasi T_0 sinfiga kiradi.

T_1 — birni saqlovchi funksiyalar. $f(1,1,\ldots,1)=1$ shartini bajaradi. Masalan, $x \vee y$ funksiyasi T_1 sinfiga kiradi.

S — o‘z-o‘ziga dual funksiyalar. Har bir $a=(a_1,\ldots,a_n)$ uchun $f(a)=\neg f(\neg a)$ tenglik bajariladi. Bu yerda $\neg a$ barcha koordinatalarni inkor qilishni anglatadi.

M — monoton funksiyalar. Agar $a_i \le b_i$ barcha i lar uchun bajarilsa, u holda $f(a) \le f(b)$ bo‘lishi kerak. Ya’ni kirish qiymatlari 0 dan 1 ga o‘zgarganda funksiya qiymati 1 dan 0 ga tushmaydi.

L — chiziqli (affin) funksiyalar. Jegalkin ko‘rinishida darajasi birdan katta bo‘lmagan, ya’ni faqat ozod had va alohida o‘zgaruvchilar qatnashadigan funksiyalardir: $c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$.

Amaliy tekshiruv tartibi. Berilgan funksiyalar tizimi uchun avval har bir funksiya T_0, T_1, S, M va L sinflariga tegishliligi tekshiriladi. So‘ng har bir sinf uchun tizimda shu

sinfga kirmaydigan kamida bitta funksiya bor-yo‘qligi aniqlanadi. Agar beshala sinfning har biri bo‘yicha bunday funksiya mavjud bo‘lsa, tizim funksional to‘liq hisoblanadi.

Jegalkin polinomi (Zhegalkin polinomi) Bul funksiyasining algebraik normal shakli bo‘lib, unda qo‘shish amali XOR — $\oplus$, ko‘paytirish esa AND — $\wedge$ ma’nosida ishlatiladi. Barcha koeffitsiyentlar 0 yoki 1 bo‘ladi va qo‘shish mod 2 bo‘yicha bajariladi. Umumiy ko‘rinish:

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus \dots \oplus a_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n.$$

Bu ifodada har bir o‘zgaruvchi ko‘pi bilan bir marta qatnashadi. Jegalkin polinomi har bir Bul funksiyasi uchun yagona bo‘ladi. Shu xususiyat uni funksiyalarni taqqoslash, chiziqlilikni aniqlash va mantiqiy ifodalarni algebraik tahlil qilishda qulay vositaga aylantiradi.

Haqiqat jadvali va Möbius almashtirishi. Funksiyaning 0 va 1 qiymatlari jadvali tuziladi. Jadvaldagi qiymatlar ustida ketma-ket XOR almashtirishlari bajarilib, polinom koeffitsiyentlari topiladi.

Algebraik almashtirish. Mantiqiy ifoda quyidagi tengliklar yordamida qayta yoziladi: $\neg x=1\oplus x$; $x\vee y=x\oplus y\oplus xy$; $x\wedge y=xy$. Keyin qavslar ochilib, bir xil hadlar mod 2 bo‘yicha qisqartiriladi.

Tayyor polinomni tekshirish. Olingan polinom barcha kirish kombinatsiyalarida dastlabki funksiya bilan bir xil qiymat berishi tekshiriladi.

NATIJALAR

Misol sifatida NAND funksiyasini qaraymiz: $x\uparrow y=\neg(x\wedge y)$. Uning qiymatlari $x=y=0$ da 1, (0,1) va (1,0) da 1, $x=y=1$ da 0 ga teng.

NAND funksiyasi T_0 sinfiga kirmaydi, chunki $f(0,0)=1$. T_1 sinfiga kirmaydi, chunki $f(1,1)=0$. U monoton emas: $(0,0)\leq(1,1)$, ammo $f(0,0)=1$ va $f(1,1)=0$. U o‘z-o‘ziga dual emas, chunki dual shartiga ko‘ra $f(0,1)=\neg f(1,0)$ bo‘lishi kerak, lekin NAND uchun $f(0,1)=1$ va $f(1,0)=1$. Shuningdek, NAND chiziqli emas, chunki uning Jegalkin polinomida xy hadi qatnashadi.

NAND amali orqali inkorni $\neg x=x\uparrow x$ ko‘rinishida, kon’yunksiyani esa $x\wedge y=(x\uparrow y)\uparrow(x\uparrow y)$ ko‘rinishida hosil qilish mumkin. Demak, NAND yakka o‘zi $\{\neg,\wedge\}$ tizimini ifodalaydi. $\{\neg,\wedge\}$ esa funksional to‘liq bo‘lgani sababli NAND amali ham funksional to‘liqdir. Bu natija Post mezoni bilan mos keladi.

Quyidagi funksiyani olaylik:

$$f(x,y)=x\vee y.$$

OR amalining Jegalkin ko‘rinishi:

$$xVy = x \oplus y \oplus xy.$$

x	y	xVy	x⊕y⊕xy
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Jadvaldan ko‘rinadiki, ikkala ustundagi natijalar bir xil. Demak, xVy funksiyasining Jegalkin polinomi x⊕y⊕xy bo‘ladi.

Agar funksiyaning Jegalkin polinomida xy, xyz kabi ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchining ko‘paytmasi qatnashsa, funksiya L sinfiga kirmaydi. Masalan, f(x,y)=xVy=x⊕y⊕xy polinomida xy hadi bor, shuning uchun bu funksiya chiziqli emas. Aksincha, f(x,y,z)=1⊕x⊕y polinomi faqat ozod had va alohida o‘zgaruvchilardan tashkil topgan, demak u affin (Postning L sinfiga tegishli) funksiyadir.

MUHOKAMA

Post teoremasining asosiy afzalligi shundaki, funksional to‘liqlikni barcha mumkin bo‘lgan Bul funksiyalarini birma-bir hosil qilib tekshirish talab etilmaydi. Buning o‘rniga beshta maxsus sinfga tegishlilik tekshiriladi. Bu yondashuv mantiqiy amallar tizimini tanlash, ortiqcha amallarni qisqartirish va universal mantiqiy elementlarni aniqlashda muhimdir.

Jegalkin polinomlari esa Bul funksiyalarini algebraik shaklda ifodalab, ularning tuzilishini aniq ko‘rsatadi. Ayniqsa, XOR amali ishlatiladigan raqamli sxemalar, xatolarni aniqlash kodlari, paritet nazorati va kriptografik algoritmlarning ayrim qismlarini tahlil qilishda bu ko‘rinish qulay. Polinomdagi yuqori darajali hadlar funksiyaning chiziqli emasligini ko‘rsatadi.

Ikki yondashuv bir-birini to‘ldiradi: Post teoremasi amallar tizimining barcha Bul funksiyalarini ifodalash imkoniyatini baholaydi, Jegalkin polinomi esa alohida funksiyaning algebraik tabiatini ochib beradi. Shuning uchun ularni birgalikda o‘rganish nazariy bilimni mustahkamlash bilan birga, mantiqiy sxemalarni loyihalash va tahlil qilish ko‘nikmalarini ham rivojlantiradi.

XULOSA

Maqolada Bul funksiyalarining funksional to‘liqligi, Post teoremasining beshta yopiq sinfi va Jegalkin polinomlari yordamida ifodalash usullari ko‘rib chiqildi. Tahlil shuni ko‘rsatadiki, funksional to‘liqlikni aniqlashda T_0, T_1, S, M va L sinflarining har biriga nisbatan tekshiruv o‘tkazish yetarli mezon hisoblanadi.

Jegalkin polinomi Bul funksiyasining yagona algebraik ifodasi bo‘lib, XOR va AND amallari asosida tuziladi. Haqiqat jadvali yoki algebraik almashtirishlar orqali uning koeffitsiyentlarini aniqlash mumkin. Polinomdagi ikki va undan ortiq o‘zgaruvchili ko‘paytma hadlar funksiyaning chiziqli emasligini ko‘rsatadi.

Xulosa qilib aytganda, Post teoremasi mantiqiy amallar tizimining imkoniyatlarini baholashga, Jegalkin polinomlari esa mantiqiy funksiyalarni ixcham va tahlil qilishga qulay algebraik shaklda ifodalashga xizmat qiladi. Mazkur mavzularni chuqur o‘zlashtirish diskret matematika, kompyuter texnikasi va raqamli tizimlar yo‘nalishidagi keyingi bilimlar uchun muhim nazariy asos yaratadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Post E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. American Journal of Mathematics, 1921, Vol. 43, No. 3, pp. 163–185.

2. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

3. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. 6th ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

4. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. Москва: Наука, 1986.

5. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. Москва: Энергоатомиздат, 1988.