GLOBAL JOURNAL OF
CROSS-DISCIPLINARY
INNOVATIONS
Multidisciplinary peer-reviewed scholarly journal
GJCDI
Vol. 1 | Issue 3
Year: 2026

Cheksiz to‘plamlar quvvati

Hasanjon Meliquziyev Muhsinjon o‘g‘li
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi
Usmonov Oyatulla Yoldoshali ogli
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi
Botirva Nasiba Djurboyvna
Farg‘ona davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya. Maqolada natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlarining quvvati taqqoslandi. Biyeksiya va elementlarni raqamlash yordamida natural, butun hamda ratsional sonlar to‘plamlarining quvvati tengligi ko‘rsatildi. Kantorning diagonal usuli haqiqiy sonlar to‘plamining sanoqsizligini asoslaydi. Qism to‘plamlar haqidagi Kantor teoremasidan haqiqiy sonlar to‘plaminikidan ham katta quvvatlar mavjudligi kelib chiqadi.

Kalit so‘zlar. To‘plam quvvati, sanoqli to‘plam, sanoqsiz to‘plam, biyeksiya, diagonal usul, kontinuum.

Kirish

Chekli to‘plamning quvvati undagi elementlar soniga teng. Masalan, $A = \{2, 4, 6\}$ bo‘lsa, $|A| = 3$. Cheksiz to‘plamlarning quvvati elementlar orasidagi moslik yordamida taqqoslanadi. Agar A va B orasida biyeksiya mavjud bo‘lsa, $|A| = |B|$ deb yoziladi. Biyeksiya A ning turli elementlarini B ning turli elementlariga mos qo‘yadi va B ning barcha elementlarini qamrab oladi [1].

Musbat juft sonlar natural sonlar to‘plamining xos qism to‘plamini tashkil qiladi. Har bir natural n songa $2n$ juft sonini mos qo‘ysak, har bir musbat juft son shu usulda yagona n dan hosil bo‘ladi. Shu biyeksiya natural sonlar bilan musbat juft sonlar to‘plamlarining quvvati tengligini ko‘rsatadi. Cheksiz to‘plam o‘zining xos qism to‘plami bilan teng quvvatli bo‘lishi mumkin [1].

Maqolaning maqsadi natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlarini yagona mezon asosida taqqoslashdan iborat. Tahlilning asosiy savoli shuki, qaysi to‘plamning

barcha elementlarini natural sonlar bilan raqamlash mumkin? Shu savol orqali sanoqli va sanoqsiz cheksizlik farqi hamda sonlarning zich joylashuvi bilan to‘plam quvvati o‘rtasidagi munosabat o‘rganiladi.

Tadqiqot metodlari

Nazariy tahlilda natural sonlar to‘plami $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ deb olindi. Elementlarini $a_1, a_2, a_3, \dots$ ketma-ketligiga takrorsiz joylashtirish mumkin bo‘lgan cheksiz to‘plam sanoqli deyiladi. Uning quvvati $\aleph_0$ bilan belgilanadi. Sanoqsiz to‘plamni shu shaklda to‘liq raqamlab bo‘lmaydi [1, 2].

A dan B ga inyeksiya deganda A ning turli elementlarini B ning turli elementlariga mos qo‘yuvchi funksiya tushuniladi. Bunday moslik mavjud bo‘lsa, $|A| \leq |B|$ bo‘ladi. Inyeksiya mavjud bo‘lib, biyeksiya tuzish imkonsiz bo‘lsa, $|A| < |B|$. Qism to‘plam elementlarini o‘ziga akslantirish inyeksiya beradi [1].

Butun va ratsional sonlar uchun raqamlash qoidasi tuzildi. Haqiqiy sonlar va qism to‘plamlarni tahlil qilishda diagonal usul qo‘llandi. Bu usulda faraziy moslikning barcha qiymatlaridan farq qiladigan yangi son yoki qism to‘plam hosil qilinadi [1, 2, 3].

Natijalar

Sanoqli to‘plamlar

Butun sonlar to‘plami $\mathbb{Z}$ ni quyidagi ketma-ketlikda yozish mumkin. Bunda noldan keyin har bir musbat son va uning qarama-qarshisi navbat bilan keladi.

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Birinchi o‘rinda nol turadi. Har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun k soni $2k$-o‘rinda, $-k$ esa $2k + 1$-o‘rinda turadi. Shu tariqa har bir butun sonning yagona natural raqami aniqlanadi va $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ bo‘ladi.

Har bir musbat ratsional sonni p/q ko‘rinishida yozish mumkin, bunda p va q musbat butun sonlardir. Avval yig‘indisi $p + q = 2$ bo‘lgan juftliklar, so‘ng $p + q = 3$, $p + q = 4$ va keyingi yig‘indilarga mos juftliklar olinadi. Har bir guruh ichida suratning o‘sish tartibi saqlanadi. Takrorlarning oldini olish uchun faqat qisqarmaydigan kasrlar yoziladi [1, 2].

$$1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \dots$$

Masalan, $2/2$ kasri $1/1$ bilan bir xil qiymatga ega, shuning uchun $p + q = 4$ guruhida u tashlab ketiladi. Har bir guruh chekli sondagi juftlikni o‘z ichiga oladi. Shu sababli har qanday musbat ratsional sonning qisqarmaydigan yozuvi o‘z guruhiga yetilganda chekli o‘rinni egallaydi. Ro‘yxat boshiga nol qo‘yib va har bir musbat kasrdan keyin uning manfiy qiymatini yozib, barcha ratsional sonlarni takrorsiz raqamlash mumkin.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

Haqiqiy sonlarning sanoqsizligi

$(0,1)$ oraliqdagi barcha haqiqiy sonlarni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ shaklida ro‘yxatga olish mumkin deb faraz qilamiz. Har bir sonning oxirida cheksiz davom etuvchi 9 raqamlari bo‘lmagan o‘nli yozuvini tanlaymiz. Masalan, $0{,}5000\ldots$ va $0{,}4999\ldots$ bitta sonni ifodalaydi, shuning uchun bu son uchun $0{,}5000\ldots$ yozuvi olinadi. Shunday tanlov o‘nli yozuvni yagona qiladi [2].

Yangi y sonini tuzishda x_n sonining verguldan keyingi n-raqamiga qaraymiz. Agar bu raqam 1 bo‘lsa, y ning shu xonasiga 2 yozamiz. Boshqa hollarda 1 yozamiz. 1-chizmada qoida dastlabki to‘rtta xona uchun ko‘rsatilgan.

Son	**1-xona**	**2-xona**	**3-xona**	**4-xona**	**…**
$x_1 = 0,$	**1**	3	7	4	…
$x_2 = 0,$	6	**5**	1	8	…
$x_3 = 0,$	8	2	**1**	6	…
$x_4 = 0,$	4	0	9	**8**	…
$y = 0,$	**2**	**1**	**2**	**1**	**…**

1-chizma. Diagonal raqamlaridan yangi son tuzish

Hosil bo‘lgan y ning kasr qismi faqat 1 va 2 raqamlaridan iborat. Demak, $y \in (0,1)$ va uning yozuvi ham tanlangan shaklga mos keladi. Har bir natural n uchun y va x_n verguldan keyingi n-xonada farqlanadi. Shu sababli y ro‘yxatda uchramaydi. Bu ziddiyat $(0,1)$ oraliqning sanoqsizligini isbotlaydi [1, 2].

$n \mapsto 1/(n+1)$ moslik $\mathbb{N}$ dan $(0,1)$ ga inyeksiya beradi. Diagonal isbot ularning quvvati teng bo‘la olmasligini ko‘rsatgani uchun $|(0,1)| > \aleph_0$. Quyidagi biyeksiya esa haqiqiy sonlar to‘plami bilan ushbu oraliqning quvvati tengligini ko‘rsatadi.

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{\pi}$$

Arktangens haqiqiy sonlar o‘qida qat’iy o‘sadi va qiymatlari $(-\pi/2, \pi/2)$ oraliqni to‘liq qamrab oladi. Shu sababli g funksiyasi uchun $(0, 1)$ dagi har bir qiymatga yagona haqiqiy argument mos keladi. Bu umumiy quvvat kontinuum quvvati deb ataladi va c bilan belgilanadi.

$$\aleph_0 < |(0,1)| = |\mathbb{R}| = c$$

Kantor teoremasi

$\mathcal{P}(A)$ orqali A ning barcha qism to‘plamlari to‘plamini belgilaymiz. Kantor teoremasiga ko‘ra, har qanday A uchun $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Haqiqatan, har bir $a \in A$ elementga $\{a\}$ ni mos qo‘yish A dan $\mathcal{P}(A)$ ga inyeksiya beradi. Endi barcha qism to‘plamlarni qamrab oluvchi $F: A \to \mathcal{P}(A)$ funksiya mavjud deb faraz qilamiz [3].

A ning faqat $F(a)$ da o‘zi uchramaydigan a elementlaridan iborat D to‘plamni olamiz.

$$D = \{a \in A \mid a \notin F(a)\}$$

D ham A ning qism to‘plami, demak farazga ko‘ra biror $d \in A$ uchun $F(d) = D$ bo‘lishi kerak. D ning ta’rifida $d \in D$ sharti $d \notin F(d)$ shartiga teng kuchli. $F(d) = D$ ni qo‘ysak, $d \in D \Leftrightarrow d \notin D$ ziddiyati hosil bo‘ladi. Barcha qism to‘plamlarni qamrab oluvchi funksiya mavjud emas. Xususan, $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, ya’ni kontinuumdan katta quvvat ham mavjud [3].

Muhokama

Ratsional sonlar haqiqiy sonlar o‘qida zich joylashgan. Ixtiyoriy $a < b$ uchun $1/n < b - a$ bo‘ladigan natural n ni tanlash mumkin. k soni na dan katta eng kichik butun son bo‘lsa, $a < k/n \leq a + 1/n < b$ kelib chiqadi. Shu tariqa istalgan ochiq oraliqdan ratsional son topiladi. Ratsional sonlarning zich joylashuvi ularni raqamlashga to‘sqinlik qilmaydi [2].

Ratsional va irratsional sonlar birlashmasi haqiqiy sonlar to‘plamini hosil qiladi. Agar irratsional sonlarni ham raqamlash mumkin bo‘lsa, ikkala ro‘yxat elementlarini navbat bilan olib, barcha haqiqiy sonlarni raqamlash mumkin bo‘lar edi. Diagonal isbot

bunday ro‘yxatning mavjud emasligini ko‘rsatadi. Bundan irratsional sonlar to‘plamining ham sanoqsizligi kelib chiqadi.

Oraliqning uzunligi va quvvati turli xossalarni o‘lchaydi. Masalan, $(0, 2)$ oraliqning uzunligi $(0, 1)$ oraliqnikidan ikki baravar katta. $x \mapsto 2x$ moslik har bir $x \in (0, 1)$ ni $(0, 2)$ dagi yagona songa o‘tkazadi va ikkinchi oraliqni to‘liq qoplaydi. Demak, uzunliklar farqli bo‘lsa ham, bu ikki oraliqning quvvati teng.

Kantor teoremasini ketma-ket tatbiq qilib, har safar avvalgisidan quvvatliroq to‘plam olish mumkin. Masalan, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ning quvvati $\mathbb{R}$ nikidan katta va $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ning quvvati yana kattaroq. Shu tariqa sanoqsiz to‘plamlar orasida ham qat’iy quvvat farqlari hosil bo‘ladi [2, 3].

Xulosa

Natural, butun va ratsional sonlar to‘plamlari sanoqli bo‘lib, bir xil quvvatga ega. Haqiqiy sonlarni to‘liq raqamlashga uringanda diagonal usul ro‘yxatdan tashqarida qoladigan sonni hosil qiladi. Shuning uchun kontinuum quvvati $\aleph_0$ dan katta. Kantor teoremasiga ko‘ra, barcha qism to‘plamlar oilasining quvvati dastlabki to‘plamnikidan katta. Shu natija sanoqsiz to‘plamlar orasida ham turli quvvatlar mavjudligini ko‘rsatadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Hammack, R. (2018). Book of Proof. 3-nashr, 14-bob. Elektron nashr

[2] Lehman, E., Leighton, F. T., Meyer, A. R. (2015). Mathematics for Computer Science. MIT OpenCourseWare, 7-bob, 7.1-bo‘lim. Elektron nashr

[3] Bagaria, J. (2023). Basic Set Theory. Set Theory maqolasiga ilova. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2024-yil kuzgi nashri. Elektron nashr