GLOBAL JOURNAL OF CROSS-DISCIPLINARY INNOVATIONS
Multidisciplinary peer-reviewed scholarly journal
GJCDI
Vol. 1 | Issue 3
Year: 2026

DIRIXLE (QUTILAR) PRINSIPI: NAZARIY ASOSLARI, ISBOTLARI VA KOMBINATORIK HAMDA KUNDALIK HAYOTDAGI TATBIQLARI

Axmadjonova Muxarramoy Shuxratjon qizi
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi
Abdug'aniyeva Asalxon Abrorjon qizi
Farg‘ona davlat texnika universiteti talabasi
Botirva Nasiba Djurboyvna
Farg‘ona davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi dotsenti

Annotatsiya

Ushbu maqolada kombinatorikaning muhim va sodda, ammo keng tatbiq doirasiga ega bo‘lgan Dirixle (qutilar) prinsipi yoritiladi. Prinsipning mazmuni, umumiy ko‘rinishi va kuchaytirilgan shakli bayon qilinib, ularning matematik isbotlari keltiriladi. Shuningdek, prinsipning kombinatorik masalalar, sonlar nazariyasi, kundalik hayot va amaliy vaziyatlarda qo‘llanilishi misollar asosida tahlil qilinadi. Keltirilgan masalalar orqali oddiy sanash va taqsimlash jarayonlarida muayyan natijaning mavjudligini qanday kafolatlash mumkinligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: Dirixle prinsipi, qutilar prinsipi, kombinatorika, taqsimlash, umumlashgan prinsip, sonlar nazariyasi, matematik isbot.

Abstract

This article discusses the pigeonhole principle, one of the fundamental ideas of combinatorics. It presents the basic and generalized forms of the principle and provides mathematical proofs. Applications to combinatorial problems, number theory, and everyday situations are analyzed through illustrative examples. The examples demonstrate how the principle guarantees the existence of a particular outcome in finite distribution and counting problems.

Keywords: pigeonhole principle, combinatorics, distribution, generalized principle, number theory, mathematical proof.

KIRISH

Matematikaning kombinatorika bo‘limi chekli to‘plam elementlarini sanash, guruhlash va turli usullarda joylashtirish masalalarini o‘rganadi. Kombinatorik masalalarning ayrimlarida barcha imkoniyatlarni birma-bir sanab chiqish qiyin yoki ortiqcha hisoblanadi. Bunday vaziyatlarda mavjudlikni, ya’ni ma’lum bir xususiyatga ega element albatta topilishini isbotlash muhim ahamiyat kasb etadi. Dirixle prinsipi ana shunday masalalarni yechishda qo‘llaniladigan sodda, lekin kuchli matematik vositadir.

Dirixle prinsipi ko‘pincha “qutilar prinsipi” yoki ingliz tilida “pigeonhole principle” deb yuritiladi. Uning nomi nemis matematigi Peter Gustav Lejeune Dirixle nomi bilan bog‘liq. Prinsipning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, agar elementlar soni ularni joylashtirish mumkin bo‘lgan qutilar sonidan ko‘p bo‘lsa, kamida bitta qutida bir nechta element bo‘lishi shart. Bu fikr kundalik hayotda ham tez-tez uchraydigan taqsimlash holatlarining matematik ifodasidir.

Maqolaning maqsadi — Dirixle prinsipining nazariy mazmunini ochib berish, asosiy va umumlashgan shakllarini isbotlash hamda uning kombinatorik va kundalik hayotga oid masalalarni yechishdagi ahamiyatini misollar orqali ko‘rsatish. Tadqiqot obyekti chekli to‘plamlarni qutilar yoki guruhlarga taqsimlash masalalari, tadqiqot predmeti esa bunday masalalarda Dirixle prinsipidan foydalanish usullaridir.

METODOLOGIYA

Maqolani tayyorlashda matematik tahlil, mantiqiy xulosa chiqarish, taqqoslash va misollar yordamida tekshirish usullaridan foydalanildi. Dastlab prinsipning sodda shakli formal ko‘rinishda ifodalandi, so‘ngra qarama-qarshilik usuli orqali isbotlandi. Keyingi bosqichda umumlashgan prinsip keltirilib, uning ham isboti berildi. Yakunda nazariy qoidalar turli amaliy va kombinatorik vaziyatlarga tatbiq etildi.

Dirixle prinsipini qo‘llashda masala shartidan uchta tarkibiy qism ajratiladi: taqsimlanayotgan elementlar, ularni joylashtirish mumkin bo‘lgan guruhlar (qutilar) va elementlarni guruhlarga taqsimlash qoidasi. To‘g‘ri qutilarni tanlash masalaning yechimini belgilovchi asosiy bosqich hisoblanadi.

NATIJALAR

Teorema 1. Agar n ta element $n-1$ ta qutiga joylashtirilsa, u holda kamida bitta qutida kamida ikkita element bo‘ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: har bir qutida ko‘pi bilan bittadan element bor. U holda $n-1$ ta qutining barchasida jami ko‘pi bilan $n-1$ ta element joylashishi mumkin. Biroq shartga ko‘ra n ta element joylashtirilgan. n ta elementni $n-1$ tadan ortiq bo‘lmagan o‘rinlarga joylashtirish mumkin emas. Bu qarama-qarshilik dastlabki faraz noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi. Demak, kamida bitta qutida kamida ikkita element mavjud. Teorema isbotlandi.

Masalan, 13 nafar o‘quvchi bo‘lgan sinfda tug‘ilgan oylar 12 ta quti sifatida qaralsa, kamida ikki o‘quvchining tug‘ilgan oyi bir xil bo‘ladi. Chunki 13 ta o‘quvchi 12 ta oyga taqsimlanmoqda.

Dirixle prinsipining umumlashgan shakli

Teorema 2. Agar N ta element k ta qutiga joylashtirilsa, u holda kamida bitta qutida kamida $\lceil N/k \rceil$ ta element bo‘ladi. Bu yerda $\lceil x \rceil$ belgisi x sonidan kichik bo‘lmagan eng kichik butun sonni bildiradi.

Isbot. Faraz qilaylik, har bir qutida $\lceil N/k \rceil - 1$ tadan ko‘p bo‘lmagan element bor. U holda barcha k ta qutidagi elementlarning umumiy soni ko‘pi bilan $k(\lceil N/k \rceil - 1)$ bo‘ladi. $\lceil N/k \rceil - 1 < N/k$ bo‘lgani sababli $k(\lceil N/k \rceil - 1) < N$. Bu esa N ta elementning barchasi joylashtirilgan degan shartga zid. Demak, kamida bitta qutida $\lceil N/k \rceil$ ta yoki undan ko‘p element bo‘lishi shart.

Masalan, 25 ta kitob 4 ta javonga joylashtirilsa, kamida bitta javonda $\lceil 25/4 \rceil = 7$ ta kitob bo‘ladi. Chunki har bir javonda 6 tadan kitob bo‘lsa, jami 24 ta kitob joylashadi va bitta kitob ortib qoladi.

Kombinatorik masalalarda qo‘llanilishi

1-masala. 8 ta butun son tanlangan bo‘lsin. Ularning orasida ayirmasi 7 ga bo‘linadigan ikkita son mavjudligini ko‘rsating.

Yechish. Har qanday butun sonni 7 ga bo‘lganda qoldiq 0, 1, 2, 3, 4, 5 yoki 6 bo‘lishi mumkin. Demak, qoldiqlar bo‘yicha 7 ta quti mavjud. 8 ta son esa shu 7 ta

qoldiq sinfiga taqsimlanadi. Dirixle prinsipiga ko‘ra, kamida ikkita son bir xil qoldiq beradi. Bu sonlarning ayirmasi 7 ga bo‘linadi. Masala isbotlandi.

2-masala. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan 5 ta nuqta berilgan. Tomonlari 1 birlik bo‘lgan kvadrat ichida joylashgan deb qaralganda, shu nuqtalardan ikkitasining orasidagi masofa √2 dan oshmasligini ko‘rsating.

Yechish. Kvadratni to‘rtta teng, tomoni 1/2 ga teng kichik kvadratga ajratamiz. 5 ta nuqtani 4 ta kichik kvadratga taqsimlaymiz. Dirixle prinsipiga ko‘ra, kamida ikkita nuqta bitta kichik kvadratda joylashadi. Kichik kvadrat diagonali $\sqrt{((1/2)^2 + (1/2)^2)} = \sqrt{2}/2$ ga teng. Demak, shu ikki nuqta orasidagi masofa ko‘pi bilan √2/2 bo‘ladi; bu esa √2 dan kichik. Shunday qilib, talab qilingan xulosa o‘rinli.

3-masala. Ixtiyoriy 6 ta odam orasida kamida ikki kishining haftaning bir kunida tug‘ilgan bo‘lishi shartmi?

Yechish. Hafta kunlari 7 ta bo‘lgani uchun 6 kishini 7 ta qutiga joylashtirish mumkin. Dirixle prinsipining o‘zi bu holatda bir xil hafta kunida tug‘ilgan ikki kishi bo‘lishini kafolatlamaydi. Masalan, olti kishi olti xil kunda tug‘ilgan bo‘lishi mumkin. Bu misol prinsipni qo‘llashdan oldin elementlar soni qutilar sonidan ko‘p yoki umumlashgan shart bajarilishini tekshirish zarurligini ko‘rsatadi. Agar odamlar soni 8 ta bo‘lsa, kamida ikki kishi haftaning bir xil kunida tug‘ilgan bo‘ladi.

Kundalik hayotdagi tatbiqlari

1-misol. Bir tashkilotda 31 nafar xodim ishlaydi. Yilning oylarini qutilar deb olsak, kamida bir oyda tug‘ilgan kunini nishonlaydigan kamida 3 nafar xodim bo‘ladi. Chunki $\lceil 31/12 \rceil = 3$. Bu xulosa xodimlarning tug‘ilgan sanalari qanday taqsimlanganidan qat’i nazar to‘g‘ri.

2-misol. 10 juft paypoq aralashtirib qo‘yilgan tortmadan, ranglar soni 5 ta bo‘lsa, kamida 6 ta paypoq tanlanganda bir xil rangdagi kamida ikkita paypoq chiqishi kafolatlanadi. Bu yerda 5 ta rang — qutilar, tanlangan 6 ta paypoq esa elementlardir. Agar 6 ta paypoq 5 ta rangga taqsimlansa, kamida bitta rangdan ikki dona paypoq chiqadi.

3-misol. Kutubxonada 50 ta kitob 6 ta javonga joylashtirilgan. Umumlashgan prinsipga ko‘ra, kamida bitta javonda $\lceil 50/6 \rceil = 9$ ta kitob bo‘ladi. Bu qoida kitoblarni javonlarga teng taqsimlashni rejalashtirishda foydalidir.

4-misol. 367 nafar insondan iborat guruhda, kabisa yili bo‘lmagan oddiy yilning 365 kuni tug‘ilgan kunlar uchun quti sifatida olinsa, kamida ikki insonning tug‘ilgan sanasi bir xil bo‘ladi. Chunki 367 ta inson 365 ta sanaga taqsimlanmoqda. Bu misol tug‘ilgan kunlar paradoksi bilan bog‘liq bo‘lgan mavjudlik fikrini sodda shaklda namoyon etadi.

MUHOKAMA

Keltirilgan natijalar Dirixle prinsipining kuchi barcha elementlarning aniq joylashuvini topishda emas, balki muayyan xususiyatga ega guruh yoki element albatta mavjudligini isbotlashda ekanini ko‘rsatadi. Ko‘pincha masalaning yechimi qutilarni to‘g‘ri tanlashga bog‘liq: masalan, sonlar uchun qoldiqlar, odamlar uchun tug‘ilgan oylar yoki hafta kunlari, buyumlar uchun esa ranglar va javonlar quti vazifasini bajaradi.

Shuningdek, prinsipning chegaralarini ham hisobga olish lozim. Elementlar soni qutilar sonidan ko‘p bo‘lmasa, sodda shakl bir qutida takrorlanish bo‘lishini kafolatlamaydi. Masalan, 6 kishining tug‘ilgan hafta kunlari 7 xil kunga to‘g‘ri kelishi mumkin. Shuning uchun masala shartidagi sonlarni solishtirish va kerakli xulosaga olib keladigan taqsimlash modelini qurish muhimdir.

Umumlashgan shakl oddiy prinsipga qaraganda aniqroq miqdoriy baho beradi. U eng ko‘p to‘ldirilgan qutida nechta element bo‘lishi kamida kafolatlanishini hisoblash imkonini yaratadi. Shu sababli prinsip kombinatorika bilan bir qatorda algoritmlarni tahlil qilish, ma’lumotlarni guruhlash, jadval va resurslarni taqsimlash kabi yo‘nalishlarda ham foydali fikrlash vositasi hisoblanadi.

XULOSA

Dirixle (qutilar) prinsipi chekli to‘plamlarni guruhlarga taqsimlashga oid fundamental kombinatorik qoidadir. Uning sodda shakli elementlar soni qutilar sonidan ko‘p bo‘lganda kamida bitta qutida ikki yoki undan ortiq element bo‘lishini kafolatlaydi.

Umumlashgan shakli esa N ta element k ta qutiga joylashtirilganda kamida bitta qutida $[N/k]$ ta element bo‘lishini ko‘rsatadi.

Maqolada prinsipning ikki shakli matematik jihatdan isbotlandi hamda sonlarning qoldiqlari, geometrik nuqtalar, tug‘ilgan oylar, paypoqlar va kitoblarni javonlarga joylashtirish kabi misollar orqali uning tatbiqlari yoritildi. Misollar prinsipning sodda ko‘rinishiga qaramay, turli masalalarda zarur xulosani qat’iy asoslashga yordam berishini ko‘rsatadi. Dirixle prinsipidan samarali foydalanish uchun avvalo elementlar va qutilarni aniq belgilash, so‘ng ularning sonini taqqoslash hamda tegishli matematik xulosani chiqarish lozim.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 8th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2019.
2. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
3. Brualdi R. A. Introductory Combinatorics. 5th ed. Pearson, 2010.
4. Grimaldi R. P. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction. 5th ed. Pearson, 2004.
5. Bóna M. A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory. 4th ed. World Scientific, 2017.